SERIE APORTES ESTUDIANTILES

Jorge Jesús Chumbipuma

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

COLECCIÓN
ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS APLICADAS

UNI
Editorial Universitaria

Rector **Dr. Aurelio Padilla Ríos**
Primer Vicerrector **Geol. José S. Martínez Talledo**
Segundo Vicerrector **Msc. Ing. Walter Zaldívar Álvarez**

Primera edición, marzo 2013

Ecuaciones diferenciales ordinarias aplicadas

Vol 1. Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias
Impreso en el Perú / Printed in Peru

Universidad Nacional de Ingeniería
Editorial Universitaria

Av. Túpac Amaru 210, Rímac – Lima
Pabellón Central / Sótano
Telfs. 4814196 / 4811070 anexo 215
Correo-e: eduni@uni.edu.pe
Jefe de la EDUNI: Prof. Alvaro Montaño Freire
Coordinador de la Editorial: Nilton Zelada Minaya

Impreso en la imprenta de la Editorial Universitaria de la
Universidad Nacional de Ingeniería

ISBN 978-612-4072-45-1

ISBN de la colección 978-612-4072-46-8

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
Nº 2013-03732

Esta obra se la dedico a mi madre
Norma Chumbimune por su apoyo
constante e incondicional
a lo largo de toda mi vida
y a mi amado hijo Gabriel,
que desde que nació
me ha dado mucha felicidad.

Prólogo

Hablar hoy en día sobre Ecuaciones diferenciales es tomar en cuenta algún modelo matemático que intente describir ciertos fenómenos de la realidad. Es así como este libro titulado *Ecuaciones diferenciales ordinarias aplicadas* tiene como fortaleza principal potenciar los conceptos y definiciones a través de la ejercitación de problemas ideales con miras al modelamiento de fenómenos reales en los diversos problemas de ciencias, ingeniería, medicina y economía; por lo que, así, guarda relación con el entrenamiento del perfil profesional de los estudiantes en las diferentes especialidades.

Además, debo resaltar, que la información vertida en el presente trabajo está de acuerdo con las definiciones que son utilizadas y que actualmente tienen vigencia, más aún porque se trata de un libro innovador en diversos aspectos como en la didáctica, la estructura, la diversificación de problemas, entre otros aspectos que hace que sea un libro idóneo para el lector que desee afianzar sus conocimientos sobre ecuaciones diferenciales.

Sin duda, un libro de cabecera para estudiantes de ingeniería, maestros y público en general que pretenda conocer a detalle las implicancias que demuestran los análisis y las diferentes aplicaciones en el modelo de ecuaciones diferenciales.

Ing. Jexy Reyna Medina

Presentación

La presente obra está dirigida a todos aquellos que deseen aprender las ecuaciones diferenciales ya sea por que estén llevando como curso en alguna universidad o instituto o como autodidacta que esté interesado en conocer y consolidar sus conocimientos sobre este tema.

Este es el primer capítulo de la obra titulada *ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS APLICADAS* y comienza con los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales donde se ha tratado de ser conciso en las definiciones con ejemplos didácticos y gráficos que ayudará al lector a una mejor comprensión de los conocimientos teóricos. En este capítulo no se profundizará el tema de "existencia y unicidad de una ecuación diferencial" ya que esto se desarrollará en el capítulo II titulado *Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de primer grado*.

En cada capítulo se hará hincapié en las aplicaciones de todo tipo ya que creo, al igual que muchos profesores del curso de ecuaciones diferenciales (ED), que lo más importante es la aplicación de las ecuaciones diferenciales para resolver los diversos problemas de ingeniería, medicina, economía, física, química, ecología, entre otros campos.

Algo que debo resaltar de esta obra es que los ejemplos resueltos y propuestos se han elegido teniendo en cuenta las diversas sugerencias tanto de compañeros como profesores que dictan en diferentes universidades del país. Por ejemplo, colocarle a los ejercicios resueltos una nomenclatura especial que la diferencie entre ellos a pesar de que se resuelven con la misma teoría.

En los ejercicios propuestos se suele dar solo el enunciado o en el mejor de los casos unas cuantas respuestas de dichos ejercicios por lo que el alumno no se motiva a resolverlos y solo se queda con lo aprendido en los ejercicios resueltos; teniendo en cuenta esto, se optó por resolver en su totalidad los ejercicios propuestos a excepción de las demostraciones y darles la respuesta al final de cada capítulo para que el lector pueda constatar su solución.

Aprovecho la oportunidad para agradecer a las siguientes personas que contribuyeron para la realización de esta obra:

Por su apoyo para la publicación al Ing. Antonio Arévalo y al Prof. Montaño, por las sugerencias, críticas y corrección del original de la obra a mis profesores en ecuaciones diferenciales: Ing. Jexy Reyna e Ing. Carlos Rojas. Un especial agradecimiento a la Lic. Evelyn Rondón Jara tanto por la corrección ortográfica y redacción de la obra como también fuente de inspiración para la concretización de la misma.

La elaboración de este texto fue una tarea muy ardua pero sin duda se han ido algunos errores, por ello para agilizar la corrección de algún error o tal vez alguna consulta, estaré muy agradecido si lo mandan en forma directa a mi correo electrónico jesusjkl@hotmail.com.

Contenido

-

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Es increible que el comportamiento de muchos fenómenos de la naturaleza se puedan describir en el lenguaje matemático, a esta descripción se le llama modelo matemático y se forma con ciertos objetivos en mente, por ejemplo, determinar la velocidad a través del tiempo que adquiere un cuerpo al ser soltado desde cierta altura o predecir el crecimiento a través del tiempo de determinada especie.

Si al primer ejemplo citado consideramos solo la fuerza de gravedad y a su vez que esta sea constante (teniendo en cuenta la segunda Ley de Newton), dicho modelo se resolverá con un simple despeje obteniendo primero la aceleración a través del tiempo para luego derivar y obtener la velocidad a través del tiempo; sin embargo, si a este modelo consideramos a la fuerza de aire y que esta es proporcional a la velocidad de cuerpo , el modelo matemático nos llevaría a tratar de resolver una ecuación que tenga derivadas de una función desconocida y esto sería una ecuación diferencial .

Con esto quiero decir que al plantear un modelo matemático nos veremos en la necesidad de resolver una ecuación diferencial, de ahí la gran importancia de estas que estudiaremos en esta obra.

.

1.1. CONCEPTOS PREVIOS

1.1.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL

Ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes y que no provengan de una **identidad**[1.1].

EJEMPLOS 1.1.1

(1) $y' = 5x^2 - \dfrac{2}{x}y$

(2) $y'' + 2y' = 3y + e^{2x}$

(3) $\left(y'''\right)^2 + \left(y''\right)^3 = y$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \dfrac{dy}{dx}}$

(5) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} = -sen\left(y''\right)$

(6) $\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial v^2} = uv$

(7) $\left(\dfrac{\delta y}{\delta x}\right)^2 + \dfrac{\delta z}{\delta t} = \dfrac{xt}{y}e^t$

NOTA 1.1

Decimos **identidad** a una ecuación que siempre es verdadera sin importar quién sea la función desconocida. Ejemplos de tales ecuaciones son:

$d(uv) = udv + vdu$

$\dfrac{d(tgx)}{dx} = \sec^2 x$

$sen^2\left(y'\right) + \cos^2\left(y'\right) = 1$

Podemos decir que de los ejemplos del (1) al (5) la variable dependiente es “y” independiente es “x” mientras que en (6) la variable dependiente es “Ω” y tiene dos variables independientes “u” y “v”; por último en el ejemplo (7) las variable dependientes son “z” e “y” y tiene dos variables independientes “x” y “t”

1.1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

A. ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA (E.D.O)

Una ecuación diferencial será ordinaria cuando la función desconocida solo dependa de una variable independiente, por ejemplo, las ecuaciones del (1) al (4) de los ejemplos anteriores. En general, dada la función y(x) y sus derivadas: $y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}$ entonces toda ecuación de la forma:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \ . . . \ (1.1.2)$$

recibe el nombre de ecuación diferencial ordinaria. En algunos casos esta puede ser representada despejando su más alta derivada de la siguiente forma:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). . . \ (1.1.3)$$

La ecuación (1.1.3) recibe el nombre de **forma normal** de la ecuación diferencial como se ve en el ejemplo (1).
Si x no aparece en la ecuación (1.1.2) diremos que la **ecuación es autónoma,** un ejemplo claro seria el ejemplo (3).

B. ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL(E.D.P)

Una ecuación diferencial será parcial cuando la función desconocida depende de más de una variable independiente, por ejemplo las ecuaciones (6) y (7) de los ejemplos 1.1.1.

1.1.3 ORDEN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

El orden de la ecuación diferencial será el orden de la derivada de mayor orden que interviene en ella**,** por ejemplo las ecuaciones (1) y (7) son de primer orden, mientras que la ecuaciones (2), (4) (5) y (6) son de segundo orden y la ecuación (3) de tercer orden de los ejemplos 1.1.1.

1.1.4 GRADO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

El grado de una ecuación diferencial que se puede expresar en forma de un polinomio respecto a su variable dependiente, es el de la derivada de mayor orden una vez que dicha ecuación haya sido racionalizada y se hayan quitado denominadores respecto a todas sus derivadas.

Teniendo en cuenta los ejemplos 1.1.1 no podemos determinar el grado de (4) directamente pero si elevamos al cuadrado se obtiene:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1 + \frac{dy}{dx}$$

De aquí podemos decir que la ecuación es de segundo grado.

Se puede observar que las ecuaciones (1), (2) y (6) son de primer grado mientras que (3) y (7) son de segundo grado.

Respecto a la ecuación (5) no se puede hablar de grado ya que la derivada de mayor orden está afectada por un seno y si este lo desarrollamos mediante una **serie de Maclaurin**[1.2] se tiene que:

$$xy'' = -\left(y'' - \frac{(y'')^3}{3!} + \frac{(y'')^5}{5!} - \frac{(y'')^7}{7!} + \ldots\right)$$

Por lo que se nota que el grado no está definido.

NOTA 1.2

Recordar que la serie de **Maclaurin** tiene la siguiente forma general:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Por ejemplo para un $f(x) = senx$ su serie de Maclaurin seria:

$$x - \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^5}{5!} - \frac{(x)^7}{7!} + \ldots$$